

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats qui y sont présentés demeurent vrais si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque — sauf les deux derniers exemples du chapitre — mais nous ne nous en préoccupons pas ici.

La notion de dimension appartient aujourd'hui au vocabulaire de tout le monde. Il est entendu qu'une droite ou une même courbe est de dimension 1, qu'un plan ou même une surface est de dimension 2, et que nous vivons dans un espace à trois dimensions. Il n'est cependant pas forcément aisé de donner un sens rigoureux à ces idées courantes. C'est précisément ce qu'on souhaite faire ici : proposer une définition axiomatique de la dimension et en faire la théorie.

Définition (Espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice (finie).

☺ ☺ ☺ **Explication** Pourquoi préciser « finie » dans cette définition ? Une famille génératrice pourrait-elle donc être infinie ? Il est vrai que les familles de vecteurs du programme de MPSI sont toutes finies, mais vous étudierez aussi des familles infinies en deuxième année. En prévision, reprenez d'ores et déjà qu'un espace vectoriel de dimension finie, comme son nom le suggère, se voit imposer une certaine condition de finitude.

Exemple Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathbb{K}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}$) sont de dimension finie. On en connaît en effet des familles génératrices, puisqu'on en connaît même des bases : leurs bases canoniques.

Notons tout de suite que tout-espace vectoriel n'est pas de dimension finie, comme l'indique l'exemple suivant :

Exemple $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

En effet Soit $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Notons d le maximum des $\partial^\circ P_k$, k décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$ — avec la convention que $d = 0$ si $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$. Alors X^{d+1} n'est pas combinaison linéaire de $P_1, P_2, \dots, P_n$, donc comme voulu $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{K}[X]$. Bref : aucune famille finie de vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ n'engendre $\mathbb{K}[X]$, donc $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

1 PROBLÈMES D'EXISTENCE : BASES ET DIMENSION

1.1 EXISTENCE DE BASES

Théorème (Théorème de la base incomplète) Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie engendré par une certaine famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Soit en outre $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ une famille libre de E . On peut compléter $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ en une base de E en lui ajoutant certains vecteurs de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Démonstration

- La preuve repose sur un algorithme qu'on appelle l'*algorithme de la base incomplète* — et qu'il convient de bien maîtriser. Principe de l'algorithme : compléter peu à peu la famille $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ à l'aide de certains x_k bien choisis de manière à ce que le résultat final soit une base de E .

1) La variable $\mathcal{B}$ que l'algorithme consiste à construire est initialisée à la valeur $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ — famille libre.

2) L'algorithme se poursuit par une boucle. Pour k décrivant l'ensemble des entiers de 1 à n :

si la famille $\mathcal{B}$ augmentée du vecteur x_k est libre,

i.e. si x_k n'est pas combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$,

alors on remplace la variable $\mathcal{B}$ par la famille $\mathcal{B}$ augmentée du vecteur x_k .

Il n'est pas nécessaire de le préciser dans l'algorithme, mais si la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_k est liée, on laisse la variable $\mathcal{B}$ tranquille et on reboucle directement. Remarquez bien que cet algorithme fait grossir $\mathcal{B}$ peu à peu : on ajoute certains vecteurs mais on n'en enlève jamais.

- Par construction, la famille $\mathcal{B}$ obtenue finalement est une famille libre : en effet, à chaque étape de l'algorithme, on a pris grand soin de préserver la liberté de la famille initiale $(y_1, y_2, \dots, y_p)$.

- Il nous reste à montrer que $\mathcal{B}$ engendre E . Or la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ engendre E . Dès lors, pour montrer que $\mathcal{B}$ engendre E , il nous suffit de montrer que tous les x_k sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{B}$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si tout d'abord x_k apparaît explicitement dans $\mathcal{B}$, alors évidemment x_k est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, égal à lui-même. Supposons au contraire que x_k n'est pas un vecteur de $\mathcal{B}$. Cela signifie que, dans la $k^{\text{ème}}$ étape de l'algorithme, x_k n'a pas été ajouté à la famille $\mathcal{B}$ en cours de construction parce qu'il était combinaison linéaire de certains vecteurs de $\mathcal{B}$. C'est justement ce que nous voulions. ■

Le corollaire suivant n'est qu'une version simplifiée du théorème de la base incomplète, souvent utile.

Corollaire (Théorème de la base incomplète (bis)) Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- (i) De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E .
- (ii) Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Exemple On pose $F = \text{Vect}\left((1, -5, 7), (2, 6, 8), (3, 1, 15), (1, 11, 1)\right)$. Alors la famille $\left((1, -5, 7), (2, 6, 8)\right)$ est une base de F .

En effet

- Commençons par utiliser mécaniquement l'algorithme de la base incomplète.
 - 1) La famille $\left((1, -5, 7)\right)$ est libre car le vecteur $(1, -5, 7)$ est non nul.
 - 2) Et la famille $\left((1, -5, 7), (2, 6, 8)\right)$? Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1, -5, 7) + \mu(2, 6, 8) = (0, 0, 0)$. Alors $\lambda + 2\mu = 0$ et $-5\lambda + 6\mu = 0$, donc assez vite $\lambda = \mu = 0$. La famille est libre.
 - 3) Et la famille $\left((1, -5, 7), (2, 6, 8), (3, 1, 15)\right)$? Elle est liée car $(3, 1, 15) = (1, -5, 7) + (2, 6, 8)$.
 - 4) Et la famille $\left((1, -5, 7), (2, 6, 8), (1, 11, 1)\right)$? Elle est liée car $(1, 11, 1) = (2, 6, 8) - (1, -5, 7)$.
 Finalement, comme annoncé, la famille $\left((1, -5, 7), (2, 6, 8)\right)$ est une base de F .
- Une remarque pour conclure. Si nous avions dès le départ modifié l'ordre des quatre vecteurs qui définissent F , nous aurions trouvé une autre base de F .

Corollaire (Existence de bases)

Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors E possède une base (finie).

✂ ✂ ✂ **Explication** Ce résultat montre que la définition « posséder une famille génératrice » des espaces vectoriels de dimension finie est équivalente à la définition « posséder une base » — sauf dans le cas où l'espace vectoriel est réduit au seul vecteur nul, car il n'existe alors même pas de famille libre.

Démonstration Comme $E \neq \{0_E\}$, nous pouvons nous donner un vecteur $y \neq 0_E$ de E . La famille (y) est alors libre. Or E est de dimension finie, donc possède une famille génératrice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ grâce à laquelle on peut, en vertu du théorème de la base incomplète, compléter la famille (y) en une base de E . ■

1.2 EXISTENCE DE LA DIMENSION

Théorème (Nombre d'éléments d'une famille libre/génératrice) Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, une famille libre a toujours moins d'éléments qu'une famille génératrice.

Démonstration Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si $E = \{0_E\}$, il n'existe aucune famille libre de vecteurs de E , donc nous n'avons rien à démontrer. Supposons au contraire $E \neq \{0_E\}$ et donnons-nous $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de E . Pour montrer que $p \leq n$, supposons par l'absurde que $p \geq n + 1$. Nous allons prouver par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

Il existe une famille génératrice de E constituée de $n - k$ vecteurs de $\mathcal{G}$ et de k vecteurs de $\mathcal{L}$.

On pourra conclure de la manière suivante. Pour $k = n$, E est engendré par une certaine sous-famille $\mathcal{L}_0$ de n vecteurs de $\mathcal{L}$. Comme $p \geq n + 1$ par hypothèse, les vecteurs de $\mathcal{L}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{L}_0$ sont donc combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}_0$. La liberté de la famille $\mathcal{L}$ est ainsi contredite, donc en fait $p \leq n$.

- **Initialisation** : La famille $\mathcal{G}$ est constituée de n vecteurs de $\mathcal{G}$ et de 0 vecteur de $\mathcal{L}$ et engendre E .

- **Hérédité :** Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Faisons l'hypothèse qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{F}$ de E constituée de $n-k$ vecteurs de $\mathcal{G}$, disons $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}}$, et de k vecteurs de $\mathcal{L}$, disons $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}$. Comme $k \leq n-1 < p$, nous pouvons nous donner un vecteur $y_{j_{k+1}}$ de $\mathcal{L}$ autre que $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}$. Or $\mathcal{F}$ engendre

$$E, \text{ donc pour certains } \lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_{n-k}}, \mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \dots, \mu_{j_k} \in \mathbb{K} : \quad y_{j_{k+1}} = \sum_{r=1}^{n-k} \lambda_{i_r} x_{i_r} + \sum_{s=1}^k \mu_{j_s} y_{j_s}.$$

Comme la famille $\mathcal{L}$ est libre, les λ_{i_r} ne peuvent pas tous être nuls et nous pouvons supposer sans perte de généralité, quitte à réordonner les x_{i_r} , que $\lambda_{i_{n-k}} \neq 0$. Du coup, par opération sur les **Vect**, nous pouvons remplacer ci-dessous $x_{i_{n-k}}$ par $y_{j_{k+1}}$:

$$E = \mathbf{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbf{Vect}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}}, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}) = \mathbf{Vect}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k-1}}, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}, y_{j_{k+1}}).$$

Comme voulu, nous avons trouvé une famille génératrice de E constituée de $n-k-1$ vecteurs de $\mathcal{G}$ et de $k+1$ vecteurs de $\mathcal{L}$. ■

Définition (Existence de la dimension) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Si $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier unique est appelé la *dimension de E* et notée $\dim E$.
- Si $E = \{0_E\}$, on décide par convention que $\dim E = 0$.

Dans le cas où $\dim E = 1$, on dit que E est une *droite (vectorielle)*. Dans le cas où $\dim E = 2$, que E est un *plan (vectoriel)*.

Démonstration Supposons $E \neq \{0_E\}$. Soient $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E . Nous devons montrer l'égalité $m = n$. Or $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est libre et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ engendre E , donc $m \leq n$ d'après le théorème précédent. Symétriquement, nous avons $n \leq m$, donc en effet $m = n$. ■

Exemple

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{K}^n = n$ car la base canonique de $\mathbb{K}^n$, à savoir la famille $\left((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1) \right)$, est une famille de n vecteurs.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = \underline{n+1}$ car la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, à savoir la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, est une famille de $n+1$ vecteurs — et non pas n , erreur classique que vous me ferez le plaisir d'éviter !

Corollaire Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , toute famille libre possède au plus n éléments et toute famille génératrice en possède au moins n .

Démonstration Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Si $n = 0$, nous n'avons rien à prouver. Et sinon ? Nous savons qu'alors E possède une base $\mathcal{B}$. Soient en outre $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Comme $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{B}$ génératrice à n éléments, un précédent théorème affirme que $\mathcal{L}$ a au plus n éléments. De même, comme $\mathcal{B}$ est libre à n éléments et $\mathcal{G}$ génératrice, alors $\mathcal{G}$ a au moins n éléments. ■

Corollaire (Caractérisation des bases) Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, ou bien si et seulement si elle est génératrice.

✕✕✕ **Attention !** Ce théorème ne dit pas que « base = famille génératrice = famille libre » en dimension finie ! Cela n'est vrai que pour les familles qui ont exactement autant de vecteurs que la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

Démonstration

- Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, si une famille $\mathcal{G}$ est génératrice, on peut en extraire une base d'après le théorème de la base incomplète. Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a ôté aucun vecteur à $\mathcal{G}$. Bref, $\mathcal{G}$ était déjà une base !
- Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, si une famille $\mathcal{L}$ est libre, on peut la compléter en une base d'après le théorème de la base incomplète. Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a ajouté aucun vecteur à $\mathcal{L}$. Bref, $\mathcal{L}$ était déjà une base ! ■

Exemple La famille $\left((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1) \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

En effet Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, et comme la famille considérée est constituée de trois éléments, nous saurons que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ quand nous aurons montré qu'elle est libre. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lambda(0, 1, 2) + \mu(1, 2, 0) + \nu(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Alors assez vite $\lambda = \mu = \nu = 0$ comme voulu.

Théorème (Isomorphisme et dimension) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

(i) Alors E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.

Précisément, si $n \neq 0$ et si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , l'application $\begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} & \longmapsto & \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \end{cases}$ est un isomorphisme.

(ii) Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est isomorphe à E si et seulement s'il est de dimension finie n .

☺ ☺ ☺ **Explication** Résultat théorique fondamental : deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension. Cela veut dire qu'on peut classer les espaces vectoriels de dimension finie à isomorphisme près en fonction de leur seule dimension : la dimension contient toute l'information structurelle nécessaire.

Démonstration L'assertion (i) est connue — définition des bases. Quid de l'assertion (ii) ? Soit F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si $n = 0$, il est clair que F est isomorphe à E si et seulement si F est lui-même de dimension 0. Et sinon ?

- Si F est de dimension finie n , E et F sont isomorphes à $\mathbb{K}^n$ d'après (i), donc isomorphes entre eux.
- Réciproquement, supposons E et F isomorphes. Nous pouvons nous donner un isomorphisme f de E sur F et une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Nous savons qu'alors $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de F , ce qui montre bien que F est lui aussi de dimension finie n . ■

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel produit) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Démonstration

- Si $\dim E = 0$, $E \times F$ et F sont isomorphes car l'application $\begin{cases} F & \longrightarrow & E \times F \\ f & \longmapsto & (0_E, f) \end{cases}$ est un isomorphisme, donc $\dim(E \times F) = \dim F = \dim E + \dim F$. — Même chose si F est de dimension 0.
- A présent, supposant E et F de dimensions non nulles, fixons $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ une base de E et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F . Nous savons qu'alors $((e_1, 0_F), (e_2, 0_F), \dots, (e_m, 0_F), (0_E, f_1), (0_E, f_2), \dots, (0_E, f_n))$ est une base de $E \times F$, donc $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = m + n = \dim E + \dim F$. ■

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration Posons $n = \dim E$. Si $n = 0$, la seule application linéaire de E dans F est l'application nulle qui envoie 0_E sur 0_F , donc $\mathcal{L}(E, F) = \{0_{\mathcal{L}(E, F)}\}$ et $\dim \mathcal{L}(E, F) = 0 = \dim E \times \dim F$. Si $n \neq 0$, nous pouvons nous donner une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Nous savons qu'alors l'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(e_k))_{1 \leq k \leq n} \end{cases}$ est un isomorphisme. Or F est de dimension finie donc F^n aussi — théorème précédent — donc $\mathcal{L}(E, F)$ également. Conclusion : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = \dim (F \times F \times \dots \times F) = n \times \dim F = \dim E \times \dim F$. ■

2 SOUS-ESPACES VECTORIELS ET DIMENSION FINIE

2.1 DIMENSION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Théorème (Dimension d'un sous-espace vectoriel) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .

- (i) Alors F est de dimension finie et : $\dim F \leq \dim E$.
- (ii) En cas d'égalité des dimensions $\dim F = \dim E$, on a l'égalité des ensembles $F = E$.

Démonstration

(i) Si $F = \{0_E\}$, nous n'avons rien à démontrer. Si au contraire $F \neq \{0_E\}$, l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres d'éléments des familles libres de F est non vide. Mais par ailleurs toute famille libre de F est une famille libre de E , donc est constituée d'au plus $\dim E$ éléments — bref, $\dim E$ majore $\mathcal{N}$. Finalement $\mathcal{N}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, donc possède un plus grand élément $n \leq \dim E$. Nous pouvons donc nous donner une famille libre $\mathcal{L}$ de F à n éléments. Si nous arrivons à établir que $\mathcal{L}$ engendre F , i.e. est une base de F , alors nous aurons prouvé que F est de dimension finie et que $\dim F = n \leq \dim E$.

Soit $x \in F$. La famille $\mathcal{L}$ augmentée de x est liée par maximalité de n dans $\mathcal{N}$. Comme $\mathcal{L}$ est libre, cela signifie que x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$. Conclusion : comme voulu, $\mathcal{L}$ engendre F .

(ii) Que dire à présent si $\dim F = \dim E = n$? Si $n = 0$, $E = F = \{0_E\}$. Dans le cas contraire, $\mathcal{L}$ est une famille libre de E à $n = \dim E$ éléments, donc est une base de E en vertu d'un théorème précédent. En particulier : $E = \mathbf{Vect}(\mathcal{L}) = F$. ■

2.2 EXISTENCE DE SUPPLÉMENTAIRES

Théorème (Existence de supplémentaires) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F possède un supplémentaire dans E .

⚡⚡⚡ **Attention !** Il est interdit de parler « du » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en général, faute d'unicité : on parle toujours d'un supplémentaire. Nous le savions déjà, mais la preuve suivante le confirme.

Démonstration En tant que sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie, F est lui aussi de dimension finie. Si $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F dans E . Si au contraire $F \neq \{0_E\}$, F possède une base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ que nous pouvons compléter en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E grâce au théorème de la base incomplète. Posons alors $G = \mathbf{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ et montrons que F et G sont supplémentaires dans E . Soit $x \in E$. Notons $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. A montrer : $\exists! (f, g) \in F \times G / x = f + g$.

• **Analyse :** Soient $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Nous savons que les coordonnées de $f + g$ sont $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que les $n - p$ dernières coordonnées de f sont nulles et que les p premières coordonnées de g sont nulles. Forcément, les coordonnées de f sont donc $(x_1, x_2, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ et celles de g sont $(0, 0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n)$. Bref : $f = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ et $g = \sum_{k=p+1}^n x_k e_k$.

• **Synthèse :** Posons $f = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ et $g = \sum_{k=p+1}^n x_k e_k$. Clairement, $f \in F$, $g \in G$ et $x = f + g$. ■

Exemple On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X+1) = P(1-X)\}$. Alors $\mathbf{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

En effet Comme dans la preuve précédente !

• Nous avons besoin d'abord d'une base de F . Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$\begin{aligned} P \in F &\iff a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d \\ &\iff \begin{cases} a &= -a \\ 3a+b &= 3a+b \\ 3a+2b+c &= -3a-2b-c \\ a+b+c+d &= a+b+c+d \end{cases} \quad \text{après identification des coefficients} \\ &\iff a=0 \quad \text{et} \quad 2b+c=0. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que $(1, X^2 - 2X)$ engendre F . Cette famille étant libre, c'est une base de F .

• Nous disposons par ailleurs d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$ en la personne, par exemple, de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$. Servons-nous-en pour compléter la base $(1, X^2 - 2X)$ de F en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

- 1) Bien sûr, la famille $(1, X^2 - 2X, 1)$ est liée.
- 2) Par contre la famille $(1, X^2 - 2X, X)$ est libre — degrés échelonnés.
- 3) Quant à la famille $(1, X^2 - 2X, X, X^2)$, elle est clairement liée.
- 4) Enfin la famille $(1, X^2 - 2X, X, X^3)$ est libre — degrés échelonnés.

Conclusion : $\mathbf{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2.3 DIMENSION D'UNE SOMME DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Théorème (Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E .

- (i) Alors $F + G$ est de dimension finie et : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (*formule de Grassmann*).
 (ii) En particulier, si F et G sont en somme directe : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration Si $\dim F = 0$, $F + G = G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ donc le résultat souhaité est vrai — de même si $\dim G = 0$. Supposons désormais F et G de dimensions non nulles.

- (ii) Commençons par supposer F et G en somme directe et donnons-nous $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ une base de G . Nous savons qu'alors $(f_1, f_2, \dots, f_m, g_1, g_2, \dots, g_n)$ est une base de $F \oplus G$ — car la somme est directe. En particulier $F + G$ est de dimension finie et : $\dim(F + G) = m + n = \dim F + \dim G$.

- (i) Comme F est de dimension finie, $F \cap G$ l'est aussi et nous pouvons donc nous donner un supplémentaire H de $F \cap G$ dans F — en particulier H est de dimension finie. D'après (i) : $\dim F = \dim H + \dim(F \cap G)$ ♠.

Montrons à présent que H est aussi un supplémentaire de G dans $F + G$.

• Montrons que $H \cap G = \{0_E\}$. C'est facile : $H \cap G = (H \cap F) \cap G = H \cap (F \cap G) = \{0_E\}$, car H est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F .

• Montrons que $H + G = F + G$, i.e. en fait que $F + G \subseteq H + G$. Soit $x \in F + G$ donné sous la forme $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Comme $F = H + (F \cap G)$, $f = h + g'$ pour certains $h \in H$ et $g' \in F \cap G$. Alors $x = f + g = (h + g') + g = h + (g + g')$, donc $x \in H + G$ comme voulu.

Finalement l'assertion (i) montre que $F + G$ est de dimension finie et que : $\dim(F + G) = \dim H + \dim G$ ♣. On conclut en éliminant $\dim H$ dans les égalités ♠ et ♣. ■

Corollaire (Caractérisation de la supplémentarité) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On s'intéresse aux trois assertions suivantes :

- (i) $\dim F + \dim G = \dim E$. (ii) $F \cap G = \{0_E\}$. (iii) $F + G = E$.

Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si **deux seulement** des trois assertions (i), (ii) et (iii) sont vraies.

En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E , les trois assertions (i), (ii) et (iii) sont vraies.

Démonstration Notons ★ la formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

(i) et (ii) $\implies$ (iii) D'après ★ : $\dim(F + G) = \dim E$. Or $F + G \subseteq E$, donc forcément $F + G = E$.

(ii) et (iii) $\implies$ (i) On obtient (i) tout de suite grâce à ★.

(iii) et (i) $\implies$ (ii) D'après ★ : $\dim(F \cap G) = 0$, donc forcément $F \cap G = \{0_E\}$. ■

 **En pratique** Le théorème précédent simplifie de beaucoup la preuve que deux sous-espaces vectoriels donnés sont supplémentaires dans un certain espace vectoriel ambiant. En effet, bien souvent, les dimensions des espaces vectoriels sont connues, et donc on n'a plus qu'à démontrer que « $F \cap G = \{0_E\}$ » — généralement facile — ou que « $F + G = E$ ». Très utile !

Exemple On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 0))$. Alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

En effet Nous admettrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Il nous suffit donc de montrer que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$ et que $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

- On montre aisément que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$.
- Montrons que $\dim F + \dim G = 3$. Déjà, il est clair que $\dim G = 1$. Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\dim F = 2$. Or $F = \{(-2y - 3z, y, z)\}_{y, z \in \mathbb{R}} = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ et la famille $((-2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ est libre, donc en effet F est de dimension 2.

3 RANG

Deux notions de *rang* sont introduites et étudiées ci-dessous. Nous en verrons une troisième dans le chapitre « Matrices » ainsi qu'une méthode simple et efficace de calcul du rang.

3.1 RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Définition (Rang d'une famille de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . Alors $\mathbf{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de dimension finie. La dimension de $\mathbf{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelée le *rang* de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et notée $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Par ailleurs : $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq n$, avec égalité si et seulement si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Le rang d'une famille de vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants qu'elle contient — i.e. avec lesquels on peut former une famille libre.

Démonstration La famille (finie) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ engendre $\mathbf{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donc $\mathbf{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de dimension finie et $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est bien défini. Or la dimension est toujours inférieure au nombre d'éléments d'une famille génératrice, donc : $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dim \mathbf{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq n$. Enfin cette inégalité est une égalité si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre — car dans un espace vectoriel de dimension n , une famille de n vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice. ■

Exemple $\text{rg}(1, X, X^2, X^3) = 4$, $\text{rg}(X, 2X, 3X) = 1$, $\text{rg}((1, 1, 0), (0, 0, 1)) = 2$ et $\text{rg}((1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)) = 2$.

3.2 RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Définition (Rang d'une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et f une application linéaire de E dans F . On appelle *rang* de f , noté $\text{rg}(f)$, la dimension de $\mathbf{Im} f$ si celle-ci est finie.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication**

- Avec les notations de la définition, montrons que le rang de f est bien (dé)fini lorsque E ou F est de dimension finie.
 - Supposons F de dimension finie. Alors comme $\mathbf{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F , nécessairement $\mathbf{Im} f$ est de dimension finie et : $\text{rg}(f) = \dim \mathbf{Im} f \leq \dim F$.
 - Supposons E de dimension finie n . Si $n = 0$, f est l'application nulle donc $\mathbf{Im} f = \{0_F\}$ et $\text{rg}(f) = 0$. Si au contraire $n \geq 1$ et si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , nous savons que $\mathbf{Im} f = \mathbf{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$, donc $\mathbf{Im} f$ est de dimension finie et : $\text{rg}(f) = \dim \mathbf{Im} f \leq \dim E$.
- Les notions de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire ne sont pas sans rapport l'une avec l'autre, car du cas 2) ci-dessus il découle que :

$$\text{rg}(f) = \dim \mathbf{Im} f = \dim \mathbf{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) = \text{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)).$$

Lemme Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et f une application linéaire de E dans F . Si $\mathbf{Ker} f$ possède un supplémentaire I dans E , alors $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\mathbf{Im} f$.

Démonstration Bien sûr, $f|_I$ est linéaire de I dans $\mathbf{Im} f$.

- Montrons que $f|_I$ est injective. Or $\mathbf{Ker} f|_I = I \cap \mathbf{Ker} f = \{0_E\}$ puisque I et $\mathbf{Ker} f$ sont en somme directe.
- Montrons que $f|_I$ est surjective de I sur $\mathbf{Im} f$. Soit $y \in \mathbf{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $E = I + \mathbf{Ker} f$, donc $x = x_I + x_K$ pour certains $x_I \in I$ et $x_K \in \mathbf{Ker} f$. On en déduit le résultat attendu : $y = f(x) = f(x_I + x_K) = f(x_I) + f(x_K) = f(x_I) + 0_F = f|_I(x_I)$. ■

Le théorème suivant est fondamental en pratique et en théorie.

Théorème (Théorème du rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . On suppose E de dimension finie. Alors : $\dim E = \dim \mathbf{Ker} f + \text{rg}(f)$.

🔗 🔗 🔗 **Explication** L'hypothèse « E de dimension finie » nous garantit que $\mathbf{Ker} f$ et $\mathbf{Im} f$ sont de dimension finie.

🔗 🔗 🔗 **En pratique** Morale de l'histoire : si je connais le noyau, je connais un peu l'image, et vis versa.

Démonstration Soit I un supplémentaire de $\mathbf{Ker} f$ dans E — nous savons qu'il en existe car E est supposé de dimension finie. Alors $\dim E = \dim \mathbf{Ker} f + \dim I$. Or $f|_I$ est un isomorphisme de I sur $\mathbf{Im} f$ en vertu du lemme, et donc $\dim I = \dim \mathbf{Im} f = \text{rg}(f)$ et c'est fini. ■

Théorème (Injectivité, surjectivité et rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F .

- (i) f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim F$.
- (ii) f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim E$.
- (iii) Si $\dim E = \dim F$: f est bijective $\iff f$ est injective $\iff f$ est surjective.

Ceci est en particulier valable dans le cas des endomorphismes ($E = F$).

✖ ✖ ✖ **Attention !** L'assertion (iii) ne dit pas que « bijectif = surjectif = injectif » en algèbre linéaire ! Elle affirme seulement que cette identité est vraie lorsque les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont même dimension.

Démonstration

- (i) Dire que f est surjective, c'est dire que $\mathbf{Im} f = F$, i.e. aussi que $\text{rg}(f) = \dim F$ puisque $\mathbf{Im} f \subseteq F$.
- (ii) Dire que f est injective, c'est dire que $\mathbf{Ker} f = \{0_E\}$, i.e. que $\dim \mathbf{Ker} f = 0$. Cela revient à dire que $\text{rg}(f) = \dim E$ en vertu du théorème du rang.
- (iii) est un petit mélange des assertions (i) et (ii). ■

Exemple L'application $\varphi : (x, y, z) \mapsto (x + y, -x + y, z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

En effet Comme φ est un endomorphisme en dimension finie, il nous suffit, pour en montrer la bijectivité, d'en montrer l'injectivité. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{Ker} \varphi$. Alors $\varphi(x, y, z) = (x + y, -x + y, z) = (0, 0, 0)$, donc rapidement $x = y = z = 0$. Comme voulu : $\mathbf{Ker} \varphi = \{(0, 0, 0)\}$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $\psi : P \mapsto XP' + P(0)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

En effet L'application ψ est bien définie — i.e. à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ — car pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$\partial^\circ (XP' + P(0)) \leq \max \{ \partial^\circ (XP'), \partial^\circ P(0) \} \leq \max \{ 1 + \partial^\circ P', \partial^\circ P(0) \} \leq \partial^\circ P \leq n.$$

Comme ψ est un endomorphisme en dimension finie, il nous suffit, pour en montrer la bijectivité, d'en montrer l'injectivité. Soit $P \in \mathbf{Ker} \psi$. Alors $XP' = -P(0)$, donc en particulier $1 + \partial^\circ P' \leq 0$, ce qui n'est possible que si $\partial^\circ P' = -\infty$, i.e. P est constant. Alors $\psi(P) = P(0) = 0$, et enfin P est nul. Comme voulu : $\mathbf{Ker} \psi = \{0\}$.

Théorème (Invariance du rang par composition avec un isomorphisme) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F .

- (i) Soient F' un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et φ un isomorphisme de F sur F' . Alors : $\text{rg}(\varphi \circ f) = \text{rg}(f)$.
- (ii) Soient E' un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et ψ un isomorphisme de E' sur E . Alors : $\text{rg}(f \circ \psi) = \text{rg}(f)$.

Démonstration

- (i) Pour commencer : $\mathbf{Im} \varphi|_{\mathbf{Im} f} = \left\{ \varphi|_{\mathbf{Im} f}(y) \right\}_{y \in \mathbf{Im} f} = \left\{ \varphi|_{\mathbf{Im} f}(f(x)) \right\}_{x \in E} = \left\{ \varphi \circ f(x) \right\}_{x \in E} = \mathbf{Im}(\varphi \circ f)$.
Or φ est injective, donc $\varphi|_{\mathbf{Im} f}$ également. Par conséquent $\varphi|_{\mathbf{Im} f}$ est un isomorphisme de $\mathbf{Im} f$ sur son image $\mathbf{Im}(\varphi \circ f)$. En particulier, $\text{rg}(f) = \dim \mathbf{Im} f = \dim \mathbf{Im}(\varphi \circ f) = \text{rg}(\varphi \circ f)$.
- (ii) Puisque $\mathbf{Im} \psi = E$: $\mathbf{Im} (f \circ \psi) = \left\{ f \circ \psi(x) \right\}_{x \in E'} = \left\{ f(y) \right\}_{y \in E} = \mathbf{Im} f$, donc $\text{rg}(f \circ \psi) = \text{rg}(f)$. ■

3.3 FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

Définition (Hyperplan) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On appelle *hyperplan de E* tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** En dimension 3 : hyperplan = plan.

En dimension 2 : hyperplan = droite.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Définition (Forme linéaire) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle *forme linéaire de E* toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

❌ ❌ ❌ **Attention !** Ne pas confondre « application linéaire » et « forme linéaire ». Le mot « forme » donne la précision « à valeurs dans $\mathbb{K}$ ».

🐞 🐞 🐞 **Explication** Concrètement c'est quoi, une forme linéaire de E ? Supposons E de dimension finie $n \neq 0$ et donnons-nous une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E ainsi qu'une forme linéaire f de E . Posons $a_k = f(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors pour tout vecteur x de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$: $f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$. C'est là l'expression typique d'une forme linéaire : tout vecteur est envoyé sur une certaine combinaison linéaire de ses coordonnées dans une base fixée. En résumé :

Forme linéaire	=	Combinaison linéaire des coordonnées
----------------	---	--------------------------------------

Exemple Soit f une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$. Posons $a = f(1, 0, 0)$, $b = f(0, 1, 0)$ et $c = f(0, 0, 1)$. Alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = f\left(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\right) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = ax + by + cz.$$

Bref, f est l'application $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$.

Exemple Soit f une forme linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$. Posons $\alpha = f(X^3)$, $\beta = f(X^2)$, $\gamma = f(X)$ et $\delta = f(1)$. Alors pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$: $f(P) = af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$. Bref, f est l'application qui, à tout polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d$, associe $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$.

Théorème (Formes linéaires et hyperplans) Soient $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et H une partie de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) H est un hyperplan de E . (ii) H est le noyau d'une forme linéaire **non nulle** de E .

🐞 🐞 🐞 **Explication** Le noyau de la forme linéaire nulle $x \mapsto 0$ de E est E tout entier, donc **PAS** un hyperplan de E .

Démonstration Posons $n = \dim E$. Laissons de côté le cas simple $n = 1$ et supposons donc $n \geq 2$.

(ii) $\implies$ (i) Si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ de E , alors en particulier H est un sous-espace vectoriel de E , mais par ailleurs **Im** $\varphi \subseteq \mathbb{K}$ et $\dim \mathbb{K} = 1$, donc en fait $\text{rg}(\varphi) \in \{0, 1\}$. Par hypothèse $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$, donc précisément $\text{rg}(\varphi) = 1$. Finalement $\dim H = \dim \mathbf{Ker} \varphi = \dim E - \text{rg}(\varphi) = n - 1$ d'après le théorème du rang, donc H est bien un hyperplan de E .

(i) $\implies$ (ii) Sous l'hypothèse que H est un hyperplan de E , donnons-nous une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de H et un vecteur e_n de E n'appartenant pas à H . Alors $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est libre et e_n n'est pas combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$, donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre. Constituée de $n = \dim E$ vecteurs, cette famille est une base de E .

Notons φ la forme linéaire de E définie par : $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \dots = \varphi(e_{n-1}) = 0$ et $\varphi(e_n) = 1$. Cette forme linéaire est non nulle. Montrons que $H = \mathbf{Ker} \varphi$. En tout cas, par définition de φ , $H \subseteq \mathbf{Ker} \varphi$. Inversement, pour tout $x \in \mathbf{Ker} \varphi$ de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$:

$$x_n = \sum_{k=1}^n x_k \varphi(e_k) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \varphi(x) = 0, \quad \text{donc } x = \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k \in H. \quad \blacksquare$$

Exemple L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 — en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z, t) \mapsto 2x + y - z + t$ de $\mathbb{R}^4$.

Exemple L'ensemble $\left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) + P'(1) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension 4 — en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0) + P'(1)$ de $\mathbb{R}_4[X]$.

*** **Attention !** L'idée des deux exemples précédents ne peut pas être appliquée à n'importe quel genre de sous-espace vectoriel. Un ensemble tel que $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X^2 P' - 2XP + P(1) = 0\right\}$ n'en relève pas car l'application $P \mapsto X^2 P' - 2XP + P(1)$, bien que linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$, n'est pas une forme linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$.

4 INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES LINÉAIRES

4.1 SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE 2

Définition (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *récurrente linéaire d'ordre 2* s'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Par définition, le *polynôme caractéristique* d'une telle suite est $aX^2 + bX + c$.

Théorème (Cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Notons Δ le discriminant du polynôme $aX^2 + bX + c$.

- **Cas où $\Delta \neq 0$:** Notons r et r' les deux racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs complexes associées au polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ sont toutes les suites $\left(\lambda r^n + \lambda' r'^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, λ et λ' décrivant $\mathbb{C}$.
- **Cas où $\Delta = 0$:** Notons r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs complexes associées au polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ sont toutes les suites $\left((\lambda n + \mu)r^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{C}$.

Théorème (Cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Notons Δ le discriminant du polynôme $aX^2 + bX + c$.

- **Cas où $\Delta > 0$:** Notons r et r' les deux racines réelles distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs complexes associées au polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ sont toutes les suites $\left(\lambda r^n + \lambda' r'^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, λ et λ' décrivant $\mathbb{R}$.
- **Cas où $\Delta = 0$:** Notons r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs complexes associées au polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ sont toutes les suites $\left((\lambda n + \mu)r^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Cas où $\Delta < 0$:** Notons $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de $aX^2 + bX + c$, où $r > 0$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs complexes associées au polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$ sont toutes les suites $\left((\lambda \sin(n\theta) + \mu \cos(n\theta))r^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ récurrente linéaire d'ordre 2 associée au polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$. Il nous faut montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a l'une des formes indiquées dans le théorème — la réciproque n'est qu'une simple vérification.

- **Cas où $aX^2 + bX + c$ possède deux racines distinctes r et r' dans $\mathbb{K}$ (i.e. $\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\delta_n = u_n - \frac{r'u_0 - u_1}{r' - r} r^n - \frac{u_1 - ru_0}{r' - r} r'^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n = \underbrace{au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n}_{=0} - \frac{r'u_0 - u_1}{r' - r} \underbrace{(ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n)}_{=r^n(ar^2 + br + c)=0} - \frac{u_1 - ru_0}{r' - r} \underbrace{(ar'^{n+2} + br'^{n+1} + cr'^n)}_{=r'^n(ar'^2 + br' + c)=0} = 0.$$

Comme par ailleurs $\delta_0 = \delta_1 = 0$, forcément $\delta_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme voulu, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\lambda r^n + \lambda' r'^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $\lambda = \frac{r'u_0 - u_1}{r' - r}$ et $\lambda' = \frac{u_1 - ru_0}{r' - r}$.

- **Cas où $aX^2 + bX + c$ possède une unique racine r dans $\mathbb{K}$ (i.e. $\Delta = 0$) :** Cette racine unique vaut en réalité $r = -\frac{b}{2a}$, et comme $\Delta = 0$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $b \neq 0$ et donc $r \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\delta_n = u_n - \frac{u_1 - ru_0}{r} nr^n - u_0 r^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n &= \underbrace{au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n}_{=0} - \frac{u_1 - ru_0}{r} (a(n+2)r^{n+2} + b(n+1)r^{n+1} + cnr^n) - u_0 \underbrace{(ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n)}_{=r^n(ar^2+br+c)=0} \\ &= -\frac{u_1 - ru_0}{r} \left[\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} nr^n + \underbrace{(2ar + b)}_{=0} r^{n+1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $\delta_0 = \delta_1 = 0$, forcément $\delta_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme voulu, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme $((\lambda n + \mu)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $\lambda = \frac{u_1 - ru_0}{r}$ et $\mu = u_0$.

- **Cas où $aX^2 + bX + c$ ne possède pas de racine dans $\mathbb{K}$ (i.e. $\Delta < 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :** Les racines de $aX^2 + bX + c$ dans $\mathbb{C}$ sont ici complexes conjuguées distinctes, disons $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ pour certains $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Certes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, mais donc aussi à valeurs complexes, donc en vertu du premier point, de la forme $(\alpha r^n e^{ni\theta} + \beta r^n e^{-ni\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pour conclure, remarquons que $\text{Im}(u_0) = \text{Im}(u_1) = 0$, i.e. : $\text{Im}(\beta) = -\text{Im}(\alpha)$ et $\text{Im}(\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}) = 0$. La deuxième égalité s'écrit aussi : $(\text{Im}(\alpha) + \text{Im}(\beta)) \cos \theta + (\text{Re}(\alpha) - \text{Re}(\beta)) \sin \theta = 0$, donc avec la première : $(\text{Re}(\alpha) - \text{Re}(\beta)) \sin \theta$, et comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$: $\text{Re}(\beta) = \text{Re}(\alpha)$. Conclusion : $\beta = \bar{\alpha}$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha r^n e^{ni\theta} + \bar{\alpha} r^n e^{-ni\theta} = 2 \text{Re}(\alpha e^{ni\theta}) r^n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) r^n$$

si l'on pose $\lambda = 2 \text{Re}(\alpha)$ et $\mu = -2 \text{Im}(\alpha)$. ■

Exemple La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

En effet Le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 1$ possède une racine réelle unique qui est 1. Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda n + \mu$. Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n$.

Exemple Il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Elle est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

En effet Les racines du polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$ sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ — complexes conjuguées. Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Or $u_0 = u_1 = 1$, donc $\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2} = 1$, d'où $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ comme annoncé.

4.2 SYSTÈMES DYNAMIQUES LINÉAIRES

On travaille ci-dessous d'un coup d'un seul dans deux contextes mathématiques distincts : celui des *systèmes dynamiques linéaires différentiels* et celui des *systèmes dynamiques linéaires discrets*. On notera respectivement E et φ :

- 1) **Systèmes dynamiques linéaires différentiels** : soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et l'endomorphisme φ de E de dérivation $y \mapsto y'$;
- 2) **Systèmes dynamiques linéaires discrets** : soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et l'endomorphisme φ de E de décalage $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

××× Attention ! Les résultats qui suivent sont faux en général si (E, φ) n'est pas l'un des deux couples décrits ci-dessus.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré d , on pose $P(\varphi) = \sum_{k=0}^d a_k \varphi^k$, où l'on rappelle que $\varphi^0 = \text{Id}_E$ et $\varphi^k = \varphi \circ \varphi \dots \circ \varphi$ (k fois) pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

- 1) **Systèmes dynamiques linéaires différentiels** : Ici, $P(\varphi)$ est l'application $y \mapsto \sum_{k=0}^d a_k y^{(k)}$ et $\text{Ker } P(\varphi)$

l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre d : $\sum_{k=0}^d a_k y^{(k)} = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

2) Systèmes dynamiques linéaires discrets : Ici, $P(\varphi)$ est l'application $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{k=0}^d a_k u_{n+k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{Ker} P(\varphi)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui satisfont la relation de récurrence linéaire d'ordre d : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^d a_k u_{n+k} = 0$.

Les équations de ces deux exemples interviennent naturellement dans la description de l'évolution temporelle des systèmes physiques — raison pour laquelle on parle de *systèmes dynamiques*. Dans les modélisations à temps *continu*, on parle plus précisément de systèmes dynamiques *différentiels* (équations différentielles), et dans les modélisations à temps *discret*, de systèmes dynamiques *discrets* (suites récurrentes). L'adjectif « *linéaire* » caractérise les systèmes dynamiques dont les solutions forment un espace vectoriel — ici le noyau $\mathbf{Ker} P(\varphi)$.

Le cas des systèmes dynamiques linéaires d'ordres 1 et 2 nous est bien connu. On remarquera bien que « suite géométrique » et « suite récurrente linéaire d'ordre 1 » sont deux expressions parfaitement équivalentes.

$P = aX + b$ ($a \neq 0, b \neq 0$)	Equation différentielle linéaire d'ordre 1	Suite récurrente linéaire d'ordre 1
Equation décrivant $\mathbf{Ker} P(\varphi)$	$ay' + by = 0$	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+1} + bu_n = 0$
Dimension de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$	1	1
Base de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$ ($r = -\frac{b}{a}$)	$x \mapsto e^{rx}$	$(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$P = aX^2 + bX + c$ ($a \neq 0, c \neq 0$)	Equation différentielle linéaire d'ordre 2	Suite récurrente linéaire d'ordre 2
Equation décrivant $\mathbf{Ker} P(\varphi)$	$ay'' + by' + cy = 0$	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$
Dimension de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$	2	2
Base de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$ lorsque $\Delta \neq 0$ (2 racines simples r et r')	$x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto e^{r'x}$	$(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r'^n)_{n \in \mathbb{N}}$
Base de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$ lorsque $\Delta = 0$ (1 racine double r)	$x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto xe^{rx}$	$(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}$

La dimension de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$ est bien sûr à interpréter en termes de *conditions initiales*. À l'ordre 2, deux conditions initiales sont requises pour fixer les deux scalaires associés aux deux vecteurs de base de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$, $y(0)/y'(0)$ par exemple ou u_0/u_1 selon le contexte.

Tâchons pour conclure d'indiquer brièvement de quelle manière ces résultats peuvent être généralisés et unifiés. Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cas du polynôme $P = (X - 2)^3(X - 3) = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$. Nous nous posons toujours la même question : à quoi $\mathbf{Ker} P(\varphi)$ ressemble-t-il ?

Ceux d'entre vous qui irez en MP verront que, parce que les polynômes $(X - 2)^3$ et $X - 3$ sont premiers entre eux, alors en vertu d'un certain *théorème de décomposition des noyaux* : $\mathbf{Ker} P(\varphi) = \mathbf{Ker} (\varphi - 2\text{Id}_E)^3 \oplus \mathbf{Ker} (\varphi - 3\text{Id}_E)$. Dès lors, trouver une base de $\mathbf{Ker} P(\varphi)$, c'est en trouver une de $\mathbf{Ker} (\varphi - 2\text{Id}_E)^3$ et une de $\mathbf{Ker} (\varphi - 3\text{Id}_E)$ puis les concaténer.

- Le noyau $\mathbf{Ker} (\varphi - 3\text{Id}_E)$ nous est déjà connu : c'est l'ensemble des solutions d'un système dynamique linéaire d'ordre 1, en l'occurrence de base $(x \mapsto e^{3x})$ ou $((3^n)_{n \in \mathbb{N}})$ selon le contexte.
- On peut montrer ensuite que le noyau $\mathbf{Ker} (\varphi - 2\text{Id}_E)^3$ est de dimension 3 et admet quant à lui pour base $(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto xe^{2x}, x \mapsto x^2e^{2x})$ ou $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n^22^n)_{n \in \mathbb{N}})$ selon le contexte.

Conclusion :

- 1) Systèmes dynamiques linéaires différentiels :** Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 4 : $y^{(4)} - 9y^{(3)} + 30y'' - 44y' + 24y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ sont toutes les fonctions :

$$x \mapsto \alpha e^{3x} + (\beta x^2 + \gamma x + \delta) e^{2x}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \delta \text{ décrivant } \mathbb{K}.$$

- 2) Systèmes dynamiques linéaires discrets :** Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ satisfaisant la relation de récurrence linéaire d'ordre 4 : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+4} - 9u_{n+3} + 30u_{n+2} - 44u_{n+1} + 24u_n = 0$ sont toutes les suites : $\left(\alpha 3^n + (\beta n^2 + \gamma n + \delta) 2^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \delta \text{ décrivant } \mathbb{K}.$